

# Introduction

Le but de ce document est de démontrer que quatre couleurs suffisent pour colorier n'importe quelle carte géographique et dès lors que tout graphe simple, planaire et connexe est de nombre chromatique quatre (voir la section suivante pour la définition de ces critères). Ce résultat est connu sous le nom du *théorème des quatre couleurs*.

Le problème remonte à 1852, lorsque le cartographe anglais Francis GUTHRIE remarqua qu'il lui suffisait de quatre couleurs pour colorer la carte (pourtant complexe) des comtés d'Angleterre, sans que deux cantons voisins ne reçoivent la même couleur. Son frère Frederick, mathématicien, ne parvenant pas à savoir si la propriété était générale, transmit la réflexion à son professeur, Auguste DE MORGAN de la *University College* de Londres. Et de fil en aiguille, le problème (devenu postulat, puis conjecture), se répandit dans la sphère mathématique, aidé en 1978 par la publication de la question par Arthur CAYLEY et son évocation lors d'un colloque de la *London Mathematical Society*. Prèsqu'aussitôt, Alfred KEMPE propose une preuve de la conjecture en 1879 et, pendant une décennie, on crut le problème des quatre couleurs résolu. KEMPE fut élu membre de la *Royal Society* et devint ensuite président de la *London Mathematical Society*. Mais onze ans plus tard, en 1890, Percy John HEAWOOD trouva une faille majeure dans la démonstration. Il parvient cependant à sauvegarder tant bien que mal la preuve en un *théorème des cinq couleurs*. Une seconde preuve, proposée par Peter Guthrie TAIT dès 1880, fut également réfutée, par Julius PETERSON en 1891.

De nombreuses tentatives ont été introduites pour réduire à quatre le nombre de couleurs à partir de la démonstration de KEMPE-HEAWOOD. En 1913, le père de l'algèbre moderne George David BIRKHOFF, formule une notion de configuration réductible et démontre la conjecture pour toutes les cartes comportant moins de vingt-six régions à colorier et cette borne est petit à petit améliorée au cours du siècle. En 1969, Heinrich HEESCH trouve des conditions *presque* nécessaires et suffisantes pour qu'une configuration soit réductible et une méthode générale pour trouver un ensemble de configurations inévitable. Ce n'est finalement qu'en 1976 que la première démonstration complète fut acceptée, celle de Kenneth APPEL et Wolfgang HAKEN. Ces derniers réalisèrent de manière informatique le programme de HEESCH et montrèrent, après 1200 heures de calcul et des dizaines de milliers de figures à l'appui, que les 1478 configurations sont réductibles et 4-coloriables. Cette preuve fut la première démonstration acceptée sur base de l'utilisation massive de l'ordinateur. Enfin, en 1995, Neil ROBERTSON, Daniel SANDERS, Paul SEYMOUR et Robin THOMAS mirent à profit l'avancement de la technologie pour compiler une réalisation nettement plus simple du programme de HEESCH, avec seulement 633 configurations.

Dans ce document, nous déclarons exposer une preuve complète du théorème qui ne nécessite pas l'utilisation d'outil informatique.

# 1 Carte et coloration

Pour colorer une carte géographique, on demande que toute paire de pays limitrophes soit coloriée de deux couleurs différentes afin de visualiser clairement la frontière qui sépare les deux pays. Dans le cadre de la démonstration du théorème, nous ne considérerons que des pays connexes, c'est-à-dire constitués d'un seul morceau<sup>1</sup>. De plus, nous restreindrons la définition de frontière entre deux pays à des courbes de longueur non nulle : deux pays ne se touchant que par un point ne sont pas considérés comme limitrophes. Enfin, nous considérerons que la carte étudiée est constituée d'un nombre fini de pays, regroupés en un ensemble connexe unique (*i.e.* nous ne regardons qu'un seul continent).

À toute carte géographique satisfaisant ces hypothèses, on peut associer un *graphe* coloré<sup>2</sup>, c'est-à-dire une représentation schématique des liens entre les pays (voir Figure 1). Chaque pays est représenté par un *sommet* coloré, relié par des *arêtes* à ses pays limitrophes. Le nombre de pays limitrophes à un sommet (*i.e.* le nombre d'arêtes partant de ce sommet) est appelé son *degré*, que l'on note  $d \in \mathbb{N}^+$ . Les polygones délimités par les arêtes entre les sommets sont appelés les *faces* du graphe<sup>3</sup>. Précisons tout de suite que l'espace externe délimité par le graphe est toujours considéré comme étant une face<sup>4</sup>.

Puisque les graphes que nous considérerons proviennent tous de cartes géographiques, ils satisfont aux propriétés suivantes :

**Simple** • Un pays n'ayant pas de frontière avec lui-même, le graphe ne présente pas de boucle (c'est-à-dire d'arête retournant sur le sommet dont elle est issue). De même, une et une seule frontière peut exister entre deux pays (connexes) et il ne peut dès lors y avoir d'arêtes

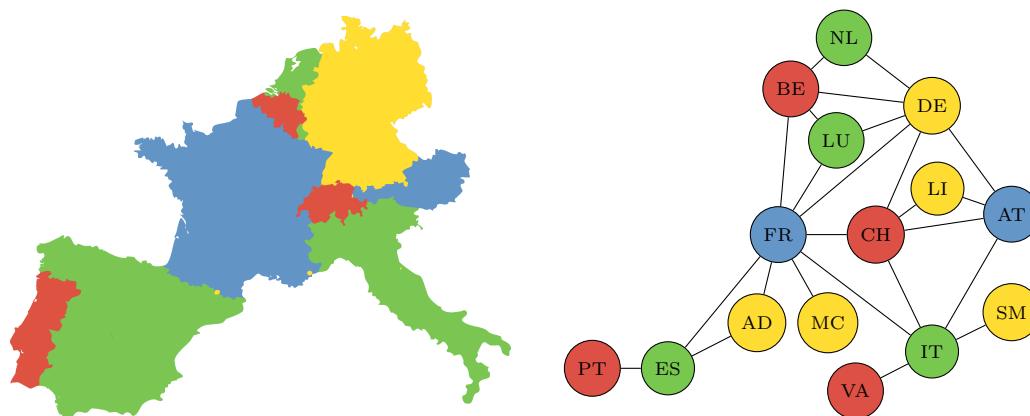


FIGURE 1 – Exemple de carte géographique et du graphe associé

1. La Corse, l'Alaska ou Baerle-Duc sont dès lors considérés comme des pays indépendants.

2. Une coloration d'un graphe  $G$  est une fonction associant à tout sommet de  $G$  une couleur, généralement un élément de l'ensemble d'indices  $\{1, 2, \dots, n\}$ , telle que deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur (où  $n$  est le nombre de sommets du graphe). De manière équivalente, en définissant un *stable* de  $G$  par un sous-ensemble de sommets deux-à-deux non adjacents, une coloration de  $G$  est une partition de son ensemble de sommets en stables. On ne différencie généralement pas les colorations qui ne sont distinctes qu'à une permutation des indices de couleurs près.

3. Les équivalents de ces faces dans la carte géographique d'origine pourraient être appelés des *embranchement de frontières*, c'est à dire des points d'où partent au moins trois frontières ou, dit autrement, où au moins trois pays se rencontrent. Ce n'est cependant pas toujours vrai : sur le graphe de la Figure 1 le Liechtenstein et l'Allemagne bordent la même face alors qu'ils ne partagent pas de frontière.

4. Un graphe ne comportant qu'un seul sommet et aucune arête possède donc une face.

multiples entre deux sommets. On dit d'un graphe sans boucle ni lien multiple qu'il est *simple* ;

**Planaire** • Une frontière ne pouvant se restreindre à un seul point, les arêtes du graphe ne peuvent pas se croiser. De plus, quelque soit la projection utilisée, une carte peut toujours être représentée sur un plan, sans devoir introduire de troisième dimension. Dès lors le graphe associé est également restreint à un plan et un sommet ne peut être relié par un autre en passant *au dessus* d'arêtes ou de sommets. Ainsi, le seul endroit où deux arêtes peuvent se rencontrer est en un sommet. On dit d'un graphe pouvant être représenté sur un plan de façon à ce qu'aucune arête ne se croise qu'il est *planaire* ;

**Connexe** • Tous les pays étant regroupés en un bloc unique (*i.e.* un continent), tous les sommets sont reliés les uns aux autres par des arêtes et on peut toujours trouver une succession d'arêtes (ce qu'on appelle un *chemin*) qui relie n'importe quelle paire de sommets. On dit alors que le graphe est *connexe*.

Tous les graphes que nous considérerons par la suite seront simples, planaires et connexes. Pour éviter la lourdeur de répétitions continues, nous sous-entendrons ces hypothèses par la dénomination de *graphe géographique*.

## 2 Chaîne de Kempe

Dans ce qui suit, nous utiliserons abondamment la notion de *chaîne de KEMPE*, à laquelle nous ferons référence en parlant simplement de *chaîne*. Une chaîne de KEMPE est un sous-ensemble bicolore connexe d'une carte coloriée. En terme de graphes, une chaîne de KEMPE est un sous-graphe connexe maximum dichromatique. Remarquons que ces « chaînes » ne sont pas nécessairement linéaires et peuvent être des arbres ou comprendre des chemins fermés. Dans une chaîne (par définition bicolore), on peut toujours échanger les deux couleurs sans que cela ne pose de problème dans le coloriage général de la carte (ou du graphe associé). On notera  $\mathcal{C}_{ab}$  la chaîne comportant le sommet  $a$  et dont la seconde couleur est celle du sommet  $b$ , celui-ci ne faisant pas nécessairement partie de la chaîne (on peut donc avoir  $\mathcal{C}_{ab} \cap \mathcal{C}_{ba} = \emptyset$ ).

Par exemple, sur la Figure 1, le Benelux forme une chaîne verte-rouge que l'on peut noter de plusieurs façons :  $\mathcal{C}_{\text{BE-NL}} = \mathcal{C}_{\text{LU-PT}} = \dots$ . De même, Andorre, Monaco, la France, l'Allemagne, l'Autriche et le Liechtenstein forment une chaîne jaune/bleue. Inverser les couleurs jaune et bleue au sein de cette chaîne donne une coloration tout aussi valable de la carte et du graphe.

Dans le cas où la chaîne  $\mathcal{C}_{ab}$  contient à la fois le sommet  $a$  et le sommet  $b$  (*i.e.* lorsque  $\mathcal{C}_{ab} = \mathcal{C}_{ba}$ ), on dira que la chaîne  $a$ - $b$  est complète, ce que l'on notera  $\bar{\mathcal{C}}_{ab}$ .

# Théorème des quatre couleurs

Nous avons à notre disposition tous les outils nécessaires pour la démonstration complète du théorème des quatre couleurs.

Certain concept s'appuie sur le **théorème des 5 couleurs**.

Si vous n'êtes pas familiarisé avec ces concepts ou que vous souhaitez vous rafraichir la mémoire nous vous le proposons en annexe.

Assez ironiquement, la première tentative de démonstration par KEMPE en 1879 contient toutes les idées maitresses de la preuve complète.

Ce chapitre va aborder successivement les points suivant :

**La « démonstration » de Kempe** : décrit l'argumentation initial de Kempe et montre à quel endroit "le bat blesse"

**L'analyse de l'exception de Heawood** nous permettra de définir avec précision la seule exception a la démonstration de Kempe ;

**La démonstration** : qui exposera avec précision la manière dont on peut démontrer le théorème.

Rappelons brièvement nos définitions et notations. Nous appelons *graphe géographique* tout graphe simple, planaire et connexe ; nous nous restreignons à ces hypothèses. Une *chaîne de KEMPE* est un sous-graphe connexe maximum dichromatique. Nous notons  $\mathcal{C}_{ab}$  la chaîne comportant le sommet  $a$  et dont la seconde couleur est celle du sommet  $b$ , celui-ci ne faisant pas nécessairement partie de la chaîne. Lorsque la chaîne  $\mathcal{C}_{ab}$  contient à la fois le sommet  $a$  et le sommet  $b$  (*i.e.* lorsque  $\mathcal{C}_{ab} = \mathcal{C}_{ba}$ ), nous disons que la chaîne  $a$ - $b$  est *complète*, ce que l'on note  $\bar{\mathcal{C}}_{ab}$ .

## 1 « Démonstration » de Kempe

### 1.1 l'argumentation initial de Kempe

Soit un graphe géographique de  $n > 4 \in \mathbb{N}^+$  sommets. On retire, un à un dans un ordre arbitraire, tous les sommets du graphe de degrés strictement inférieurs à six et ce jusqu'à n'avoir plus que quatre sommets<sup>5</sup>. Puisqu'à chaque fois que l'on supprime un sommet de degré  $d$  on supprime également les  $d$  arêtes qui le connectent au reste du graphe, chaque suppression d'un sommet tend à diminuer les degrés de ses voisins : ces derniers finiront tous, par le résultat démontré dans le théorème des 5 couleurs (cf annex 8), tôt ou tard, par avoir un degré inférieur à six et on pourra toujours descendre jusqu'aux quatre sommets finaux. La procédure est donc

---

5. Si jamais la suppression d'un sommet divise le graphe en sous-graphes non connexes (au maximum cinq), on traite chacun des graphes obtenus séparément.

complètement générale. Une fois que l'on n'a plus que quatre sommets, le graphe est clairement 4-coloriable : on choisit arbitrairement une couleur par sommet.

L'idée de la démonstration est ensuite de réintroduire, un par un et dans l'ordre inverse, chacun des sommets supprimés et de montrer qu'à chaque étape, le graphe est toujours 4-coloriable et ce indépendamment du nombre  $n$  initial de sommets. Remarquons que, puisque au moment de leur suppression chaque sommet était de degré inférieur à six, chaque sommet que l'on réinsère est toujours de degré au plus cinq et on distingue trois cas.

## Premier cas

Le premier cas est le plus simple : si le degré du sommet inséré est plus petit ou égal à trois, sa coloration est triviale puisqu'il reste toujours au moins une couleur disponible pour colorer ce sommet.

## Deuxième cas

On supposera, dans tous les autres cas, que les sommets qui ont une arête commune avec le sommet 0, forment un chemin fermé autour de celui-ci, connectés par des arêtes 1-2, 2-3, 3-4, 4-1 (ou 4-5 et 5-1 lorsque nous verrons les cas 3 et 4). Cette hypothèse, plus contraignante que celles habituellement supposées pour la démonstration du théorème, simplifiera nos réflexions dans la démonstration. Cette hypothèse est effectivement plus contraignante puisqu'elle empêche deux sommets qui, sans la présence de ces arêtes seraient adjacents mais non voisins, d'être colorés de la même couleur. La suppression de ces arêtes donne un graphe dont la coloration est toujours valide, alors que l'inverse n'est pas vrai. Enfin, le sommet 0 étant par hypothèse d'un degré fini pour chacun des cas traités, il ne peut exister d'autres arêtes qui lui sont connectées et la présence de ce chemin fermé ne réduit pas la généralité de la démonstration : l'hypothèse est alors acceptable.

Dans le second cas, on considère les sommets de degré égal à quatre. Si deux (ou plus) des sommets voisins au sommet que l'on vient de réinsérer (le sommet 0) sont colorés de la même couleur, il reste à nouveau au moins une couleur disponible et le cas est trivial.

En revanche, si les quatre sommets voisins sont colorés à l'aide des quatre couleurs différentes, on opère de manière analogue à la démonstration du théorème des cinq couleurs. On dénote « 0 » le sommet réinséré que l'on souhaite colorer et on numérote de 1 à 4 ses sommets voisins<sup>6</sup> (voir Figure 3). Si la chaîne  $C_{13}$  n'est pas complète (*i.e.*  $\bar{C}_{13} \nexists$ ), on peut permuter les couleurs dans la chaîne  $C_{31}$  sans modifier le sommet 1 : les sommets 1 et 3 auront la même couleur finale et la seconde couleur de la chaîne sera disponible pour le sommet 0<sup>7</sup>.

Si la chaîne  $\bar{C}_{13}$  est complète, il ne sert à rien de permuter les couleurs dans cette chaîne : les deux sommets ne feraient qu'échanger leurs couleurs. Mais dans ce cas, il ne peut pas exister de chaîne complète  $\bar{C}_{24}$  puisqu'une telle chaîne devrait croiser  $\bar{C}_{13}$  en un sommet de couleur commune, or celles-ci sont de couleurs différentes. On est dès lors libre de permuter les couleurs dans  $C_{24}$  ou  $C_{42}$  de façon à ce que 2 et 4 soient de la même couleur et qu'une couleur soit libérée pour colorer le sommet 0.

---

6. À nouveau, on suppose de plus que ces sommets forment un chemin fermé autour de 0, reliés par les arêtes 1-2, 2-3, 3-4 et 4-1.

7. Le choix du sommet sur lequel s'effectue la permutation de couleur, c'est-à-dire le choix de la chaîne  $C_{13}$  ou de  $C_{31}$ , est arbitraire et on peut, de manière équivalente, permuter les couleurs dans la chaîne  $C_{13}$ . De même, le choix de numérotation des sommets étant tout autant arbitraire, on peut s'intéresser de manière équivalente à la chaîne  $C_{24}$ .

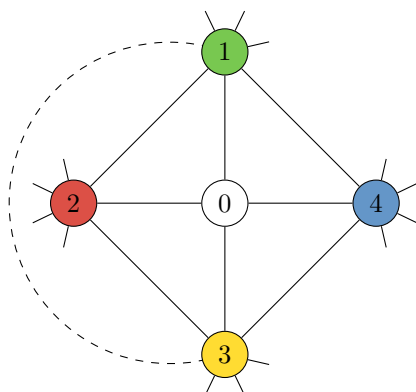


FIGURE 2 – Deuxième cas  
La chaîne  $\bar{C}_{13}$  existe-t-elle ?

### Troisième cas

Enfin, le troisième cas s'occupe des sommets de degré cinq. Pour un tel sommet, au moins deux de ses voisins sont nécessairement de même couleur et si plus de deux ont la même couleur, le cas est trivial : il reste au moins une couleur disponible pour le colorer.

Si seuls deux sommets sont homochromes, il existe un sommet dont les deux voisins ont la même couleur<sup>8</sup>. La situation est celle reprise sur le premier graphe de la Figure 4, où les sommets 2 et 5 de même couleur sont séparés par le sommet 1.

On doit toutefois avant de traiter ce cas générique constater que notre hypothèse des arrête reliant entre eux les sommets 1 à 5 nous impose qu'il existe un sommet ayant 2 voisins de couleur identique. Si tel n'était pas le cas, voila le seul autre graphe possible (compte tenus de la remarque sur les arrete exedentaire entre les sommet 1 à 5).

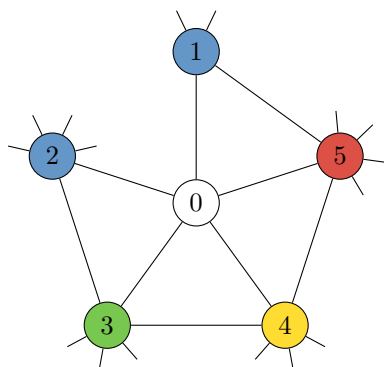


FIGURE 3 –  
pas d'arrete entre les sommet 1 et 2

Dans se cas, les 2 sommets ayant la même couleur peuvent être vus comme un seul sommet lors de l'analyse de cas, et on pourra utilisé la méthode du deuxième cas pour attribuer une couleur au sommet 0.

Dans tous les autre cas, il existe un sommet dont les deux voisins ont la même couleur. On regarde d'abord s'il existe une chaîne complète  $\bar{C}_{13}$  (resp.  $\bar{C}_{14}$ ). Si une telle chaîne complète

8. Encore une fois, on suppose que les sommets 1 à 5 sont liés en un chemin fermé autour de 0. Ceci est une hypothèse plus contraignante : s'ils n'étaient pas liés entre eux, les sommets voisins de 0 pourraient tous être de la même couleur. Puisque tout graphe 4-coloriable avec notre méthode est nécessairement 4-coloriable lorsqu'on lui supprime n'importe quelle arête, cette hypothèse ne réduit pas la généralité de la démonstration.

n'existe pas, on peut permuter les couleurs dans  $\mathcal{C}_{13}$  ou  $\mathcal{C}_{31}$  (resp.  $\mathcal{C}_{14}$  ou  $\mathcal{C}_{41}$ ) et de ce fait libérer la couleur de l'un de ces sommets pour le sommet 0.

Dans le cas où à la fois  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  existent, alors (par non croisement des chaînes de couleurs différentes) les chaînes  $\mathcal{C}_{24}$  et  $\mathcal{C}_{53}$  ne peuvent pas être complètes (*i.e.* elles ne peuvent pas contenir, respectivement, les sommets 4 et 3). La preuve de KEMPE s'achève en stipulant que l'on peut dès lors permuter les couleurs dans ces deux chaînes, comme illustré sur le deuxième graphe de la Figure 4, pour éliminer la couleur commune des sommets 2 et 5, qui peut ensuite être utilisée pour le sommet 0. A priori, la preuve est alors complète, tous les cas ayant été traités, et le théorème des quatre couleurs est démontré.

Mais il y a un *mais* ...

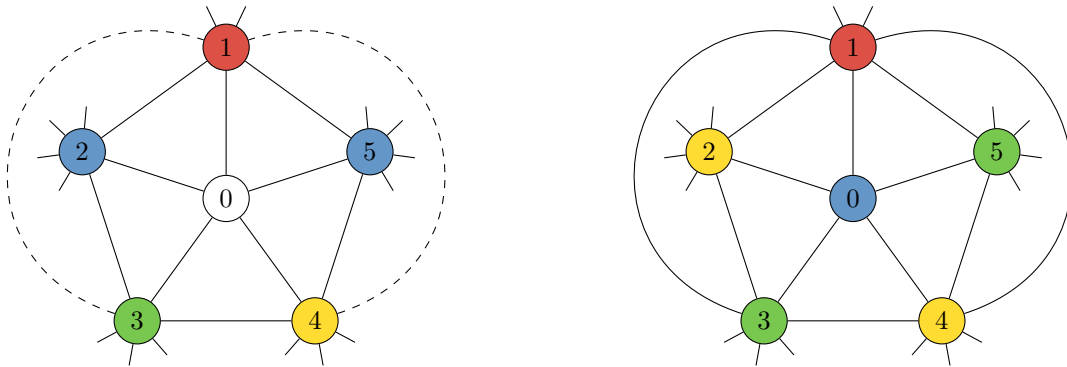


FIGURE 4 – Troisième cas  
Si  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  existent, KEMPE nous dit qu'on peut permuter les couleurs dans  $\mathcal{C}_{24}$  et  $\mathcal{C}_{53}$ .

## 2 le contre-exemple de Heawood

Le problème dans la démonstration de KEMPE se situe dans la dernière phrase :

[...] on peut dès lors permuter les couleurs dans ces deux chaînes, comme illustré sur le deuxième graphe de la Figure 4, pour éliminer la couleur commune des sommets 2 et 5 [...]

En fait, lorsque l'on permute les couleurs des deux chaînes, on est bien obligé de le faire d'abord dans l'une, puis dans l'autre. Et il existe des cas où l'enchaînement de ces permutations crée de nouvelles chaînes qui modifient les couleurs des sommets autour de 0 et empêchent d'éliminer la couleur désirée. Mais mis à part le traitement de ce troisième et dernier cas, le reste de la démonstration est absolument correct !

Le premier contre-exemple a été donné par HEAWOOD en 1890. D'autres contre-exemples ont été donnés dans la suite, dont deux graphes minimaux. Prenons l'exemple du graphe minimal de FRITSCH, donnée en 1998, repris à la Figure 5, où il ne reste plus qu'un sommet à colorer (que l'on note 0, comme précédemment). On retrouve le troisième cas de la Figure 4, entouré de trois sommets supplémentaires qui forment deux chaînes complètes  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$ , que l'on a colorées pour plus de visibilité. On remarque que ces deux chaînes se croisent sur le sommet 7, de la couleur commune.

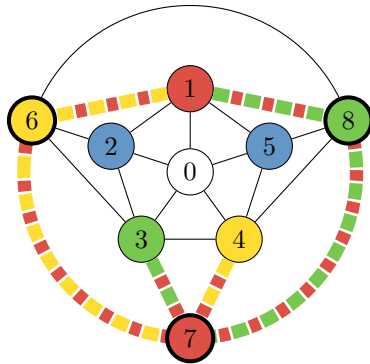


FIGURE 5 – Graphe de Fritsch  
*Contre-exemple minimal* [1998]

Si on suit l'argument de la démonstration de KEMPE, on peut alors permuter les couleurs de  $\mathcal{C}_{24}$  et de  $\mathcal{C}_{53}$  pour se débarrasser de la couleur commune à 2 et 5. On voit cependant à la Figure 6 (à gauche) que l'inversion des couleurs dans  $\mathcal{C}_{24}$  brise la chaîne  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  et complète la chaîne  $\mathcal{C}_{53}$  (qui devient  $\bar{\mathcal{C}}_{53}$  puisqu'alors  $\mathcal{C}_{35}=\mathcal{C}_{53}$ ). Permuter les couleurs de la chaîne  $\bar{\mathcal{C}}_{53}$  ne permettra donc pas de libérer une couleur (Figure 6 à droite). Après avoir appliqué la méthode proposée par KEMPE, on se retrouve toujours avec quatre couleurs autour du sommet 0, dans une configuration de type du troisième cas de KEMPE (voir Figure 4).

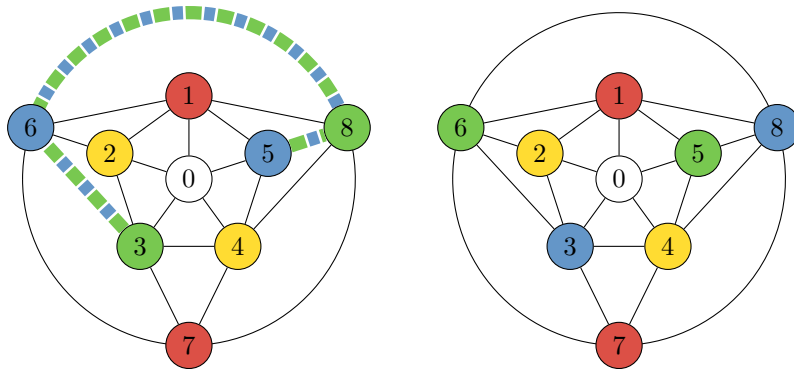


FIGURE 6 – Inversion de couleurs  
*À partir du graphe de FRITSCH, inverser les couleurs dans  $\bar{\mathcal{C}}_{24}$  introduit une chaîne complète  $\bar{\mathcal{C}}_{53}$  (à gauche). Permuter ensuite les couleurs dans cette chaîne n'apporte dès lors pas la simplification désirée (à droite).*

Cependant, cela ne veut pas dire qu'il est impossible de colorer ce graphe avec seulement quatre couleurs (l'idée est justement de montrer dans ce document que tout graphe géographique est toujours 4-coloriable!). La Figure 7 illustre une quadricoloration valide du graphe.



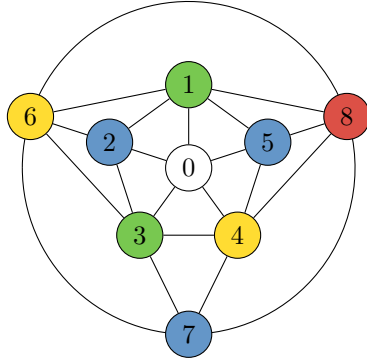


FIGURE 7 –  
Exemple de coloration

## 2.1 Les limites de la méthode de Kempe

L'existence de contre-exemples prouve que la démonstration de KEMPE est incorrecte, en particulier le traitement du troisième cas possédant deux chaînes  $\bar{C}_{13}$  et  $\bar{C}_{14}$ . Lorsque ces deux chaînes existent et qu'elles se croisent, la démonstration ne prend pas en compte le fait que l'inversion de la première chaîne peut briser la seconde, ce qui engendre une modification des hypothèses de départ (lesquelles stipulent qu'il existe deux chaînes) : la méthode n'est donc plus applicable.

## 2.2 Analyse des conditions minimum de l'exception de Heawood

On peut définir le graphe de différentes manières :

**par négation** : tous les graphes qui ne peuvent être résolus par les méthodes de KEMPE. Il faut rappeler que notre but étant de trouver une solution (et pas de mettre la méthode de KEMPE « partiellement » en défaut), nous ne nous intéressons qu'au cas où les 2 permutations des chaînes de KEMPE sont mises en échec. Si la  $\mathcal{PC}_{24}$  puis la  $\mathcal{PC}_{53}$  ne fonctionnent pas (il persiste 4 couleurs pour les voisins de 0), mais que la  $\mathcal{PC}_{53}$  puis la  $\mathcal{PC}_{24}$  fonctionnent, nous considérerons le problème comme ayant une solution (et donc ne demandant pas de traitement complémentaire). Dans la suite du document, nous vérifierons systématiquement que les 2 ordres de permutation sont bien pris en compte.

**par ces contraintes** En définissant les conditions auxquelles le schéma doit obligatoirement répondre pour être dans ce cas de figure.

**1er condition** Nous sommes dans le cas où  $\bar{C}_{13}$  et  $\bar{C}_{14}$  existent.

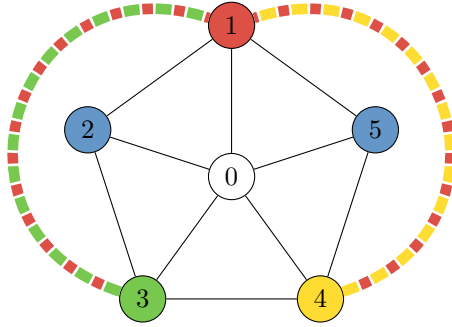


FIGURE 8 –  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  existe

**2em condition** Il doit exister au moins un sommet commun à la  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  et à la  $\mathcal{C}_{24}$ . Et en symétrie au moins un sommet commun à la  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et à la  $\mathcal{C}_{53}$ .

De manière plus synthétique on a :

$$\bar{\mathcal{C}}_{14} \cap \mathcal{C}_{24} \neq \emptyset$$

$$\bar{\mathcal{C}}_{12} \cap \mathcal{C}_{53} \neq \emptyset$$

Lorsque les deux chaînes  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  ne se croisent pas (figure 9), les sommets 2 et 5 sont respectivement enclavés par des chaînes ne contenant pas les couleurs de  $\mathcal{C}_{24}$  et  $\mathcal{C}_{53}$ . Sur la figure, le sommet 2 est enclavé par une chaîne qui n'est ni bleue ni jaune et le sommet 5 par une chaîne qui n'est ni bleue ni verte. L'inversion des couleurs dans  $\mathcal{C}_{24}$  et  $\mathcal{C}_{53}$  n'a alors d'influence que strictement à l'intérieur de ces enclaves et la méthode de KEMPE fonctionne toujours.

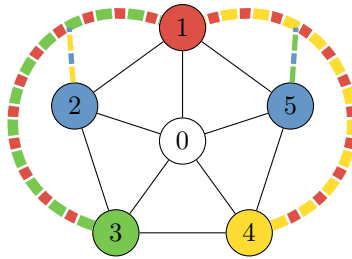


FIGURE 9 –  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  ne se croise pas

En revanche, lorsque les chaînes  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  se croisent (figure 10), elles ne forment plus d'enclave perméable autour des sommets 5 et 2, puisqu'elles contiennent respectivement la deuxième couleur des chaînes  $\mathcal{C}_{53}$  et  $\mathcal{C}_{24}$ . Ainsi, il peut exister un croisement entre  $\mathcal{C}_{24}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  (resp. entre  $\mathcal{C}_{53}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$ ) puisqu'elles partagent la couleur du sommet 4 (resp. du sommet 3) et la permutation de couleur dans  $\mathcal{C}_{24}$  (resp.  $\mathcal{C}_{53}$ ) peut passer à travers la chaîne  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  (resp.  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$ ). À l'endroit précis d'un tel croisement (s'il existe), la chaîne  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  (resp.  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$ ) va être : brisée par la permutation de couleurs dans  $\bar{\mathcal{C}}_{24}$  (resp.  $\bar{\mathcal{C}}_{53}$ ) et le raisonnement de KEMPE n'est plus applicable.

3 nouveaux sommets sont nécessaire pour atteindre cette condition, nous les appelons 6,7 et

8.

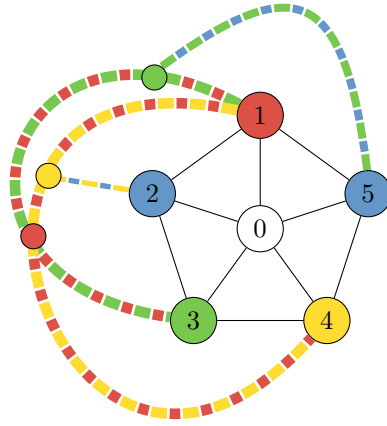


FIGURE 10 –  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  se croise

Les 2 chaînes  $\mathcal{C}_{24}$  et  $\mathcal{C}_{53}$  peuvent avoir une intersection avec respectivement la  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  et la  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$ . La figure 11 (de droite) est identique à la figure 10 mais représenté de manière symétrique

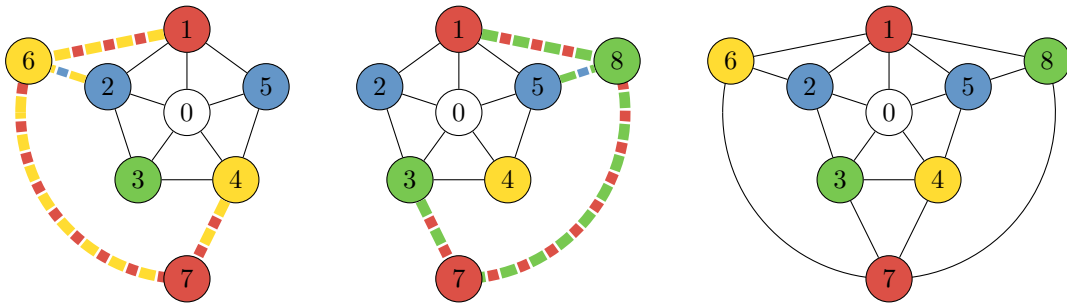


FIGURE 11 – Condition 2

**3em condition** Pour être dans l'exception de HEAWOOD et que les méthodes de KEMPE soient mises en échec, il faut que la modification, qui a lieu dans la chaîne  $\bar{\mathcal{C}}_{13}$  (décrite en condition 2) lors de la  $\mathcal{PC}_{53}$ , engendre une  $\bar{\mathcal{C}}_{24}$  qui aura pour conséquence de ne pas pouvoir réduire les couleurs voisines du sommet 0 à 3. Pour permettre cette chaîne, on ajoute une arrête entre les sommets 6 et 8 au schéma de la figure 11

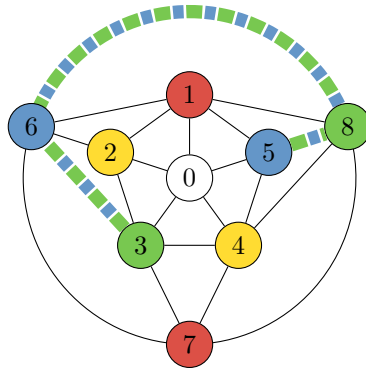


FIGURE 12

La même condition en symétrie doit être vrai ; la  $\mathcal{PC}_{24}$  modifie la  $\bar{\mathcal{C}}_{14}$  et crée une  $\bar{\mathcal{C}}_{53}$  qui empêche (lors de la  $\mathcal{PC}_{24}$ ) de réduire les couleurs autour du sommet 0 à 3. Elle emprunte la même chaîne  $\bar{\mathcal{C}}_{68}$  (figure 13).

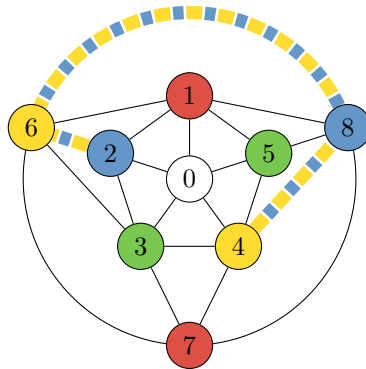


FIGURE 13

Cela nous donne (Figure 14) le schéma **presque** minimal des conditions de l'exception d'HEAWOOD.

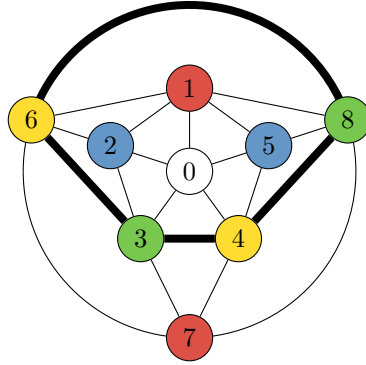


FIGURE 14

Presque, parce qu'au moment de l'ajout de l'arête 6-8 pour satisfaire à la 3eme condition de l'exception d'HEAWOOD, on crée un dédoublement de la  $C_{34}$ . L'une comprend uniquement les sommets 3 et 4, l'autre comprend les sommets 3, 6, 8, 4. Ce dédoublement n'apporte rien et sans l'arête 3, 4, notre schéma minimal répond toujours à toutes les conditions de l'exception d'HEAWOOD. Ce qui nous permet de représenter le schéma minimal des conditions de l'exception d'HEAWOOD ci-dessous (figure 15)

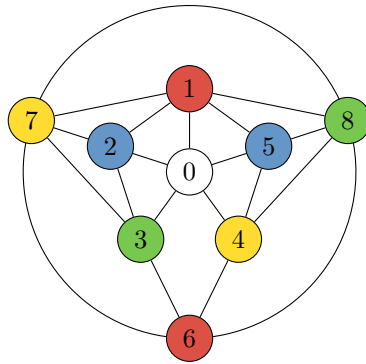


FIGURE 15

Toutefois, comme nous l'avons expliqué plus avant, le sommet 0 a déjà le nombre d'arêtes maximum (par définition de niveau 5 maximum), dès lors d'une part l'arête 3-4 n'entrave aucune autre construction du graphe, d'autre part, si le graphe peut être résolu avec cette arête, la démonstration sera tout aussi valable sans cette arête. Au chapitre 4, nous prendrons le graphe de la figure 14 comme base de travail, puisque l'arête 2-4 augmente les contraintes sans limiter les éventuelles autres constructions du graphe.

### Resumé

On peut resumé les conditions du cas 4 comme ceci :

**Condition 1 :**

$$\bar{C}_{13} \neq \emptyset$$

$\bar{\mathcal{C}}_{14} \neq \emptyset$   
 et  $\bar{\mathcal{C}}_{13} \cap \bar{\mathcal{C}}_{14} \neq \emptyset$

**Condition 2 :**

$\bar{\mathcal{C}}_{14} \cap \mathcal{C}_{24} \neq \emptyset$

$\bar{\mathcal{C}}_{12} \cap \mathcal{C}_{53} \neq \emptyset$

**Condition 3 :**

Après une  $\mathcal{PC}_{24}$  la  $\bar{\mathcal{C}}_{35} \neq \emptyset$

ou après une  $\mathcal{PC}_{35}$  la  $\bar{\mathcal{C}}_{24} \neq \emptyset$

Par convention, nous appellerons ce schéma "le **cas 4**" dans la suite du document en référence au 3 autres cas déjà décrit par KEMPE

### 3 Étendre le graphe

Nous reprenons ici la manière dont les arêtes entre les différents sommets du graphe minimal peuvent être découpées (transformées en chaînes) tout en restant dans les conditions du cas 4. Nous les représentons symboliquement par un couple de sommets sur l'arête qui les lie. Par exemple entre le sommet 1 et 6, on peut insérer 2 sommets de couleur 6 et 1.

**Avant la 1<sup>er</sup> permutation** . La Figure 16 représente un schéma toujours conforme au cas 4, pour les arêtes directement utilisées pour répondre aux 2 premières conditions du cas 4 (avant la 1<sup>ère</sup> permutation).

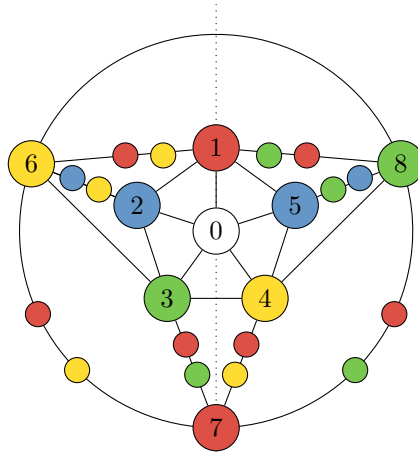


FIGURE 16

**Après la 1<sup>ère</sup> permutation arêtes 3-7 et 4-8** . On peut de la même manière ajouter des sommets sur les arêtes qui sont exploitées après la 1<sup>ère</sup> permutation. Dans ce cas, il faut qu'ils aient les couleurs correspondantes aux sommets après permutations. Les 3 arêtes 3-6, 4-8 et 6-8 sont concernées. Si l'on souhaite ajouter des sommets sur l'arête 3-6 (resp 4-8), il faut qu'après la  $\mathcal{PC}_{53}$  (resp  $\mathcal{PC}_{24}$ ), la chaîne 3-6 (resp 4-8) soit toujours existante. On doit donc, pour l'arête 3-6, insérer 2 sommets de couleur 2 et 3 (et non 3 et 6) et pour l'arête 4-8 insérer 2 sommets de couleur 4 et 5 (et non 4 et 8).

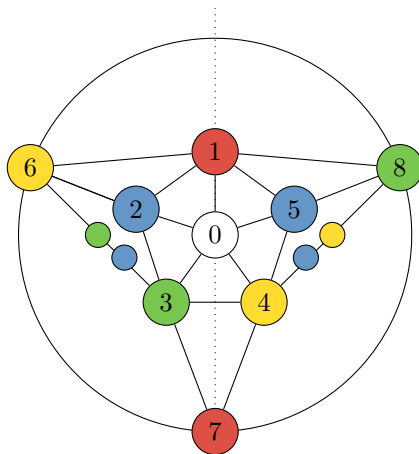


FIGURE 17

**Après la 1<sup>ère</sup> permutation arête 6-8** . Enfin, l'arête 6-8 est particulière selon l'ordre des permutations, elle prendra des couleurs différentes. Avant permutation elle est vert/jaune, si la 1<sup>er</sup> permutation se fait sur la  $\bar{C}_{24}$ , elle est bleu/verte, Si la 1<sup>ère</sup> permutation se fait sur la  $\bar{C}_{53}$ , elle est bleu/jaune. Il est donc impossible de réunir sur une même chaîne 3 couleurs, mais il est tout à fait possible d'avoir 2 chaînes entre 6 et 8 comme le montre la figure 18.

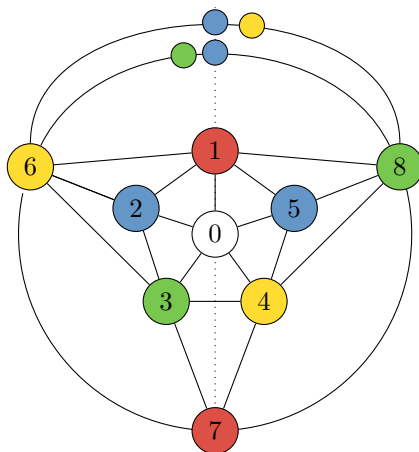


FIGURE 18

Les 3 graphes des figures 16, 17 et 18 sont tous les 3 conformes aux 3 critères décrits pour correspondre au cas 4 (correspondre à l'exception d'HEAWOOD).